وزارة التعليم العالي	الامتحان النهائي	الاسم :
جامعة البعث	لمقرر تحليل (3) السنة الثانية رياضيات	الدرجة 100
كلية العلوم – قسم الرياضيات	الفصل الأول لعام 2015- 2016	المدة ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (26درجة) (أ) أوجد مجال تقارب متسلسلة الدوال :

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$ المعرفة على $R-\{-1\}$

(ب) أدرس تقارب أو تباعد الجداء اللانهائي الآتي واحسب قيمته في حال التقارب :

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\right]$$

السؤال الثاني (40درجة) (أ) أدرس التقارب المنتظم لمتتالية الدوال التي حدها العام يعطى كما يلي :

$$f_n(x)=\frac{2n^2x}{1+n^4x^2} \quad , \quad x\in R \quad , \quad n\in N$$

(ب) هل يمكن لمتتالية دوال غير مستمرة على مجال ما أن تكون متقاربة بالتنظيم من دالة مستمرة على هذا المجال ؟ وضح ذلك بدراسة التقارب المنتظم لمتتالية الدوال التي حدها العام هو :

$$g_n(x)=\frac{1}{n}D(x) \quad , \quad x\in R \quad , \quad n\in N$$

حيث أن : $D(x)$ دالة ديريخليه على R

(ج) أدرس التقارب المنتظم المتسلسلة الدوال الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)^n}{1+n^2x^2} \quad , x\in[0,1]$$

السؤال الثالث (34درجة) : (أ) أوجد منشور فورييه للدالة : $f(x)=\sin x$ المعرفة على المجال $[0,\pi]$ الذي يحوي الجيوب فقط .

(ب)مستخدماً التكاملات الأولرية ،أثبت صحة ما يلي :

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\ , x>0 \quad \text{و} \quad \int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}} \quad ,0<m<n$$

	انتهت الأسئلة	أستاذ المقرر
حمص في 25 /1/ 2016	مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح	د. منير مخلوف

جامعة دمشق — سلم تصحيح الامتحانات الأولى

كلية العلوم — مقرر تحليل رياضي ٢ / سنة ثانية رياضيات — الدرجة: ٢٠٠

قسم الرياضيات — الفصل الأول للعام $\frac{٢٠١٥}{٢٠١٦}$

جواب السؤال الأول: (أ) إن سلسلة الدالة: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$ تمثل سلسلة هندسية أساسها: $q=\frac{x-1}{x+1}$ ومن ثم فالشرط اللازم [26]

والكافي كي تكون متقاربة هو: $|q|=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1$ ومنه يكون:

$$-1<\frac{x-1}{x+1}<+1$$

ونميز حالتين: (1) إذا كان $x+1>0$ فإن: 14

$$-x-1<x-1<x+1$$

وبالتالي يكون: $-x-1<x-1$ و $x-1<x+1$

أي: $0<2x$ ومنه $x>0$ و $-1<+1$ وهذا صحيح

(2) إذا كان $x+1<0$ فينتج لدينا:

$x+1<x-1<-x-1$ و $x-1<-x-1$ أي $x<0$ و $+1<-1$

وهذا مستحيل و $x<0$ الذي يؤدي إلى أن $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1$ والسلسلة متباعدة

وبذلك تكون السلسلة المفروضة متقاربة من أجل $x>0$ أما من أجل

$x=0$ فنحصل على السلسلة التالية: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ لأن:

$\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ غير موجودة

وعليه فإن مجال التقارب هو: $]0,+\infty[$

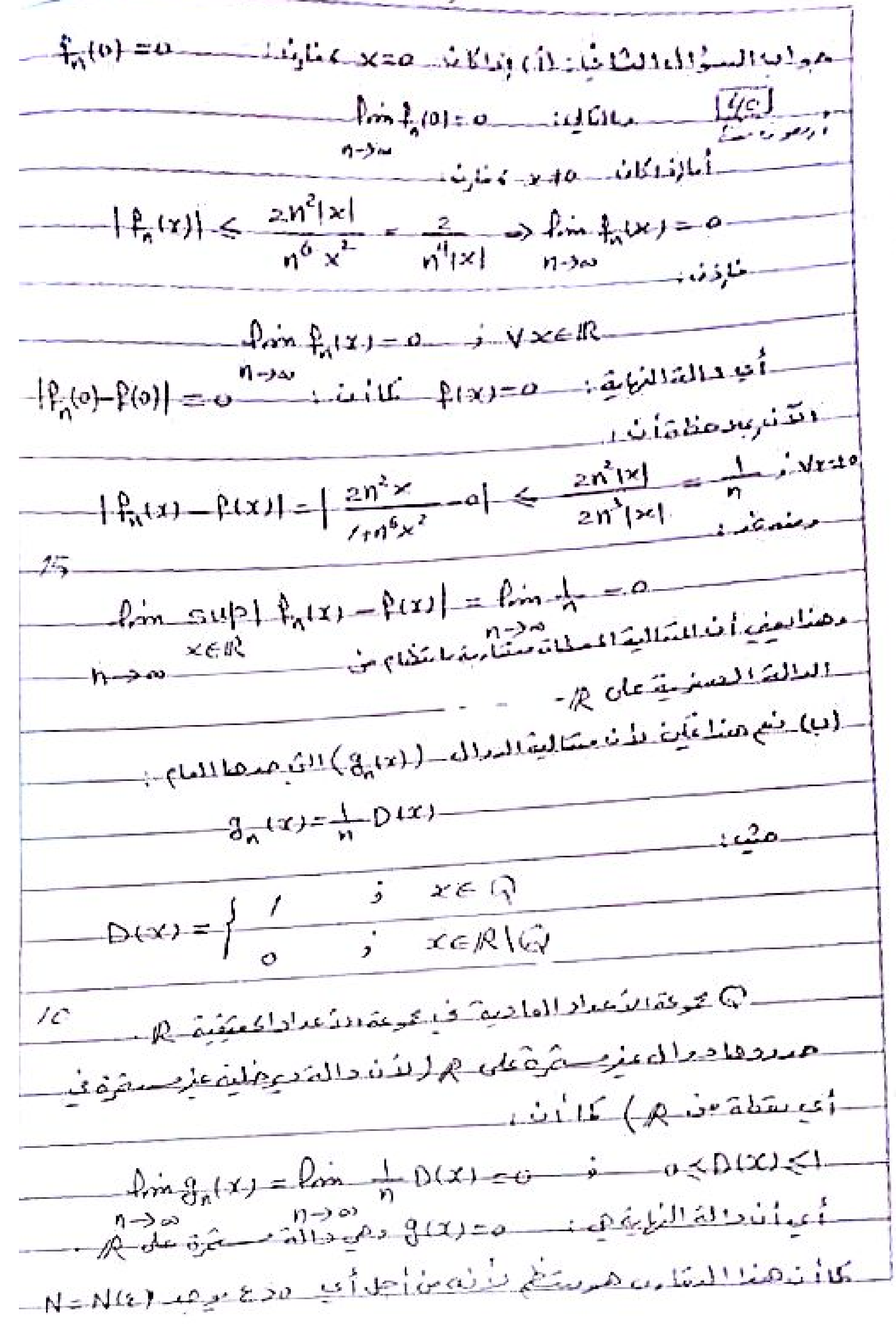
(ب) نلاحظ أن: $P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$ =

$$P_n=\frac{1\cdot4}{2\cdot3}\cdot\frac{2\cdot5}{3\cdot4}\cdot\frac{3\cdot6}{4\cdot5}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}=$$

12

$$P_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{(n-1)!}{n!}\cdot\frac{(n+2)!}{(n+1)!}=\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{1}{3}$$

فالجداء اللانهائي المفروض متقارب وقيمته تساوي: $P=\frac{1}{3}$



جواب السؤال الثاني: (أ) وإذا كان $x=0$ فإننا: $f_n(0)=0$

4/C

وبالتالي: $\lim_{n\to\infty} f_n(0)=0$

أما إذا كان $x\neq 0$ فإننا:

$$|f_n(x)| \le \frac{2n^2|x|}{n^6x^2} = \frac{2}{n^4|x|} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$$

وإذن:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \ ; \ \forall x\in\mathbb{R}$$

أي دالة النهاية: $f(x)=0$ كذلك: $|f_n(0)-f(0)|=0$

التقارب منتظم لأن:

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{2n^2x}{1+n^6x^2}-0\right| \le \frac{2n^2|x|}{2n^3|x|} = \frac{1}{n} \ ; \ \forall x\neq 0$$

ومنه فإن:

15

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

وهذا يعني أن المتتالية المعطاة متقاربة بانتظام من الدالة الصفرية على $\mathbb{R}$.

(ب) نعم هناك مثال لذلك متتالية الدوال $(g_n(x))$ التي حدها العام:

$$g_n(x)=\frac{1}{n}D(x)$$

حيث:

$$D(x)=\begin{cases}1 & ; \ x\in\mathbb{Q}\\ 0 & ; \ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

$\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد النسبية في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

10

وهذه دوال غير مستمرة على $\mathbb{R}$ (لأن دالة ديرخليه غير مستمرة في أي نقطة من $\mathbb{R}$) كما أن:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}D(x)=0 \ ; \ 0\le D(x)\le 1$$

أي أن دالة النهاية هي: $g(x)=0$ وهي دالة مستمرة على $\mathbb{R}$.

كما أن هذا التقارب منتظم لأنه من أجل أي $\varepsilon>0$ يوجد $N=N(\varepsilon)$

بحيث يكون:

$$|g_n(x) - g(x)| = \left|\frac{1}{n} D(x) - 0\right| = \frac{1}{n} D(x) \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

لكل $n > N$ ، $\forall x \in \mathbb{R}$

وبالتالي: $N > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow N = N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

إذن: $N = N(\varepsilon)$ موجود و[illegible].

(جـ) عندئذ: $\sqrt{x(1-x)} \leq \frac{x+(1-x)}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$x^n(1-x)^n \leq \frac{1}{4^n} \quad ; \forall x \in [0,1]$$

والمتسلسلة العددية: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ متقاربة حسب اختبار كوشي

حيث: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{4^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4^n}} = \frac{1}{4} < 1$

إذن: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^n$ متقاربة بانتظام على $[0,1]$

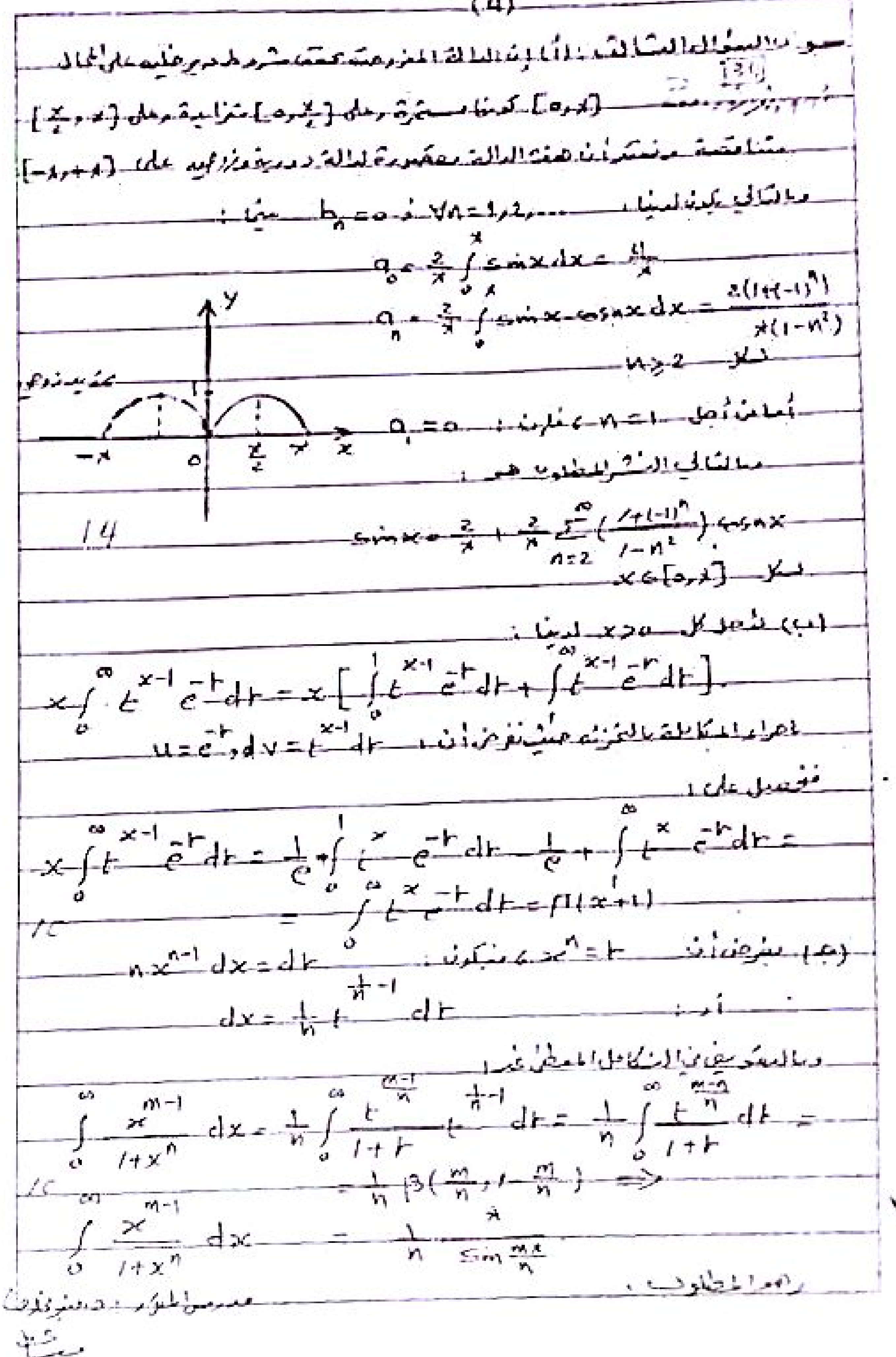
أيضاً متتالية الدوال $\left(\frac{1}{1+n^2x^2}\right)$ متناقصة ومحدودة على $[0,1]$ لأن:

$$\forall n \in \mathbb{N}: 1+n^2x^2 < 1+(n+1)^2x^2 \Rightarrow \frac{1}{1+n^2x^2} > \frac{1}{1+(n+1)^2x^2}$$

$$\left|\frac{1}{1+n^2x^2}\right| \leq 1 \quad ; \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]$$

ومنه حسب اختبار آبل ينتج أن: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x)^n}{1+n^2x^2}$ متقاربة بانتظام

على $[0,1]$



ج: السؤال الثالث: (أ) إن الدالة المعرفة كما شرحنا عليه على المجال [3] $[0,\pi]$ كما مستمرة وعلى $[0,\frac{\pi}{2}]$ متزايدة وعلى $[\frac{\pi}{2},\pi]$ متناقصة، ونعتبر أن هذه الدالة معرفة لدالة دورية زوجية على $[-\pi,+\pi]$

وبالتالي يكون لدينا: $b_n = 0 \;\; \forall n=1,2,\dots$ وأيضا:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos nx \, dx = \frac{2(1+(-1)^n)}{\pi(1-n^2)}$$

لكل $n \geq 2$

أما من أجل $n=1$ فإن: $a_1 = 0$

وبالتالي النشر المطلوب هو:

$$\sin x = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\right)\cos nx$$

لكل $x \in [0,\pi]$

14

(ب) لكل $x>0$ لدينا:

$$x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\left[\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\right].$$

بإجراء المكاملة بالتجزئة حيث نفرض أن: $u=e^{-t}, dv=t^{x-1}dt$

فنحصل على:

$$x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \frac{1}{e}+\int_0^1 t^x e^{-t}dt - \frac{1}{e} + \int_1^\infty t^x e^{-t}dt =$$

$$= \int_0^\infty t^x e^{-t}dt = \Gamma(x+1)$$

12

(جـ) بفرض أن $x^n = t$ فيكون: $n x^{n-1}dx = dt$

أي: $dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$

وبالتعويض في التكامل المعطى نجد:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{m-1}{n}}}{1+t}t^{\frac{1}{n}-1}dt = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}dt =$$

$$= \frac{1}{n}\beta\left(\frac{m}{n},1-\frac{m}{n}\right) \Longrightarrow$$

12

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

وهو المطلوب.

مدرس المقرر: د. [illegible]